МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 531.46

Оригинальное эмпирическое исследование

https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-7-13

Динамика плоского твердого тела на горизонтальной плоскости



EDN: ATOYXO



А.И. Муницын, В.Э. Цой

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Российская Федерация

✉ tsoyve@mpei.ru

Аннотация

Введение. Исследование движения твердого тела, несущего подвижные массы, значительно упрощает проектирование капсульных роботов, которые могут перемещаться внутри агрессивных сред и выполнять необходимые операции. Достаточно хорошо изучены случаи: движения при взаимодействии твердого тела с опорной плоскостью и в агрессивных средах; вибрационного перемещения сыпучих сред и твердых тел на вибрирующем основании; оптимизации движения твердых тел; варьирования средней скорости и ускорения на различных интервалах движения; зависимости средней скорости от параметров задачи; управления скоростью перемещения внутренней массы для наискорейшего поворота твердого тела. Однако в настоящее время в литературе уделено недостаточно внимания задачам исследования движения тяжелого плоского тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту, особенно в плане учета всех возможных режимов движения и их особенностей. Это не позволяет определять оптимальные параметры задачи. Поэтому целью данной работы стало выявление особенностей всех возможных режимов движения тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту.

Материалы и методы. В работе использовали уравнения движения механической системы. Для решения стационарных уравнений движения системы применялись как аналитические подходы, так и численные методы. В качестве модели трения была принята модель сухого трения, что позволило получить точные решения для положительного и отрицательного значения скорости проскальзывания с точностью до констант. Значения этих констант определялись из условий стыковки и периодичности решения.

Результаты исследования. Получено аналитическое решение задачи для периодических решений. Выявлены три возможных режима движения. С помощью численного анализа построены зависимости средней за период скорости движения тела от угла наклона силы к горизонту. Установлено оптимальное направление силы.

Обсуждение и заключение. Результаты проведенных исследований позволяют определить оптимальные значения параметров задачи для достижения необходимого значения средней скорости движения твердого тела. В частности, могут быть найдены оптимальные значения амплитуды силы и ее направления для достижения максимального значения средней скорости движения твердого тела.

Ключевые слова: опорная плоскость, сухое трение, нелинейные колебания, режим движения, плоское твердое тело, горизонтальная плоскость

Благодарности. Авторы выражают благодарность редакции и рецензентам за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили повысить ее качество.

Для цитирования. Муницын А.И., Цой В.Э. Динамика плоского твердого тела на горизонтальной плоскости. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):7–13. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-7-13

Original Empirical Research

Dynamics of a Flat Rigid Body on a Horizontal Plane

Aleksander I. Munitsyn, Valeryan E. Tsoy
National Research University MPEI, Moscow, Russian Federation
tsoyve@mpei.ru

Abstract

Introduction. The study of the motion of a rigid body carrying moving masses greatly simplifies the design of capsule robots that can move inside aggressive environments and perform the required operations. The following cases have been studied quite well: movement during interaction of a solid body with a reference plane and in aggressive environments; vibratory displacement of bulk media and solids on a vibrating base; optimization of rigid body motion; variation of average speed and acceleration at different intervals of motion; dependence of average speed on task parameters; control of the motion speed of the internal mass for the fastest possible rotation of a rigid body. However, at present, insufficient attention has been paid in the literature to the problems of studying the motion of a heavy flat body along a horizontal plane under the action of a harmonic force directed at an angle to the horizon, specifically, in terms of taking into account all possible driving modes and their features. This does not allow determining the optimal parameters of the problem. Therefore, the objective of this research was to identify the features of all possible modes of motion of a heavy solid body along a horizontal plane under the action of a harmonic force directed at an angle to the horizon.

Materials and Methods. The equations of motion of the mechanical system were used. Both analytical approaches and numerical methods were used to solve the steady-state equations of motion of the system. The dry friction model was adopted as a friction model, which made it possible to obtain accurate solutions for positive and negative values of the slip velocity up to constants. Values of these constants were determined from the docking conditions and the periodicity of the solution.

Results. An analytical solution to the problem for periodic solutions was obtained. Three possible motion modes were identified. Using numerical analysis, the dependences of the average speed of a body motion over the period on the angle of inclination of the force to the horizon were constructed. The optimal direction of force was established.

Discussion and Conclusion. The results of the conducted research allowed us to determine the optimal values of the problem parameters in order to reach the required value of the average velocity of a solid body. In particular, optimal values of the amplitude of the force and its direction can be found to reach the maximum value of the average velocity of motion of a solid.

Keywords: reference plane, dry friction, nonlinear vibrations, motion mode, flat rigid body, horizontal plane

Acknowledgements. The authors would like to thank the Editorial board and the reviewers for their attentive attitude to the article and for the specified comments that improved the quality of the article.

For Citation. Munitsyn AI, Tsoy VE. Dynamics of a Flat Rigid Body on a Horizontal Plane. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2025;25(1):7–13. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-7-13

Введение. В последнее время все большую актуальность имеют задачи проектирования движения роботов, несущих необходимые объекты, в том числе, перемещаемые в агрессивных средах [1] и способные выполнять требуемые операции [2]. Как правило, модель, учитывающая взаимодействие твердого тела с опорной плоскостью, это модель сухого трения [3]. В этой задаче много общего с задачей вибрационного перемещения сыпучих сред и твердых тел на вибрирующем основании [4]. Оптимизация движения капсульного робота при варьировании средней скорости рассматривалась в [5]. В [6] изменялось ускорение на различных интервалах движения. Капсульный робот, управление которым основано на этих двух принципах, рассмотрен в [7]. В работе [8] приведена оптимизация средней скорости. В [9] построена математическая модель электромагнитной силы втягивания сердечника. Зависимость средней скорости движения от параметров возбуждения рассмотрена в [10]. В [11] исследуется закон управления скоростью движения внутренней массы для наискорейшего поворота робота. Движение капсульного робота с двумя массами, движущимися по параллельным направляющим, рассмотрено в [12], а по двум взаимно перпендикулярным направляющим — в [13]. Роботы с линейно движущимися массами и ротором рассмотрены в [14]. Во всех перечисленных работах не исследовалось движение твердого тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту, не устанавливались различные режимы движения и их особенности. Поэтому целью данного исследования являлось выявление особенностей всех возможных режимов движения твердого тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту. Достижение поставленной цели позволяет определить оптимальные параметры задачи

исследования, например, такие как: оптимальный угол действия силы для достижения максимальной скорости, необходимые и оптимальные значения параметров задачи исследования для достижения требуемой скорости движения твердого тела.

Материалы и методы. Для решения поставленной задачи составляем уравнение движения механической системы. Решение уравнения для каждого режима движения может быть получено отдельно.

Уравнения движения. Тело имеет массу m и двигается по горизонтальной плоскости вдоль оси x. На тело действует гармоническая сила $F = A_0 \cos(\theta t)$, направленная под углом β к горизонтальной плоскости, где A_0 — амплитуда действующей внешней силы; θ — частота действующей внешней силы. Обозначим V_x— скорость тела в горизонтальном направлении; V_y— скорость тела в вертикальном направлении.

Движение твердого тела описывается системой двух уравнений:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \eta Ns + A_0\, cos\,\beta\, cos\left(\theta t\right),$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = A_0\, sin\,\beta\, cos\left(\theta t\right) + N - mg,$$

где g — ускорение свободного падения; N — сила реакции основания. В приведенных уравнениях сила трения учитывается по модели Кулона. Для этого введен коэффициент сухого трения η и безразмерный параметр s, который в состоянии покоя может принимать любое значение в диапазоне от –1 до 1. В случае проскальзывания, при V_x не равной нулю, сила трения постоянна и направлена противоположно скорости проскальзывания. Безразмерный параметр задается выражением $s = -sign(V_x)$.

Далее полагаем, что силы реакции основания распределены равномерно по опорной поверхности и движение тела происходит без отрыва от основания, то есть скорость тела в вертикальном направлении равна нулю. Из двух уравнений для описания движения твердого тела остается одно — для движения в горизонтальном направлении:

$$\frac{dV}{dt} = \eta s\left(1 - A\, sin\,\beta\, cos\,T\right) + A\, cos\,\beta\, cos\,T, \tag{1}$$

где $T = \theta t$ — безразмерное время; $V = V_x\theta/g$ — безразмерная скорость и безразмерная амплитуда возбуждения колебаний $A = A_0/(mg)$.

Похожая задача о движении твердого тела, несущего несбалансированный ротор по наклонной плоскости, была рассмотрена в [15].

Уравнение (1) имеет тривиальное решение при $V(t) = 0$. Это означает то, что тело находится в покое на рассматриваемом промежутке времени. Тогда параметр силы трения меняется по следующему закону:

$$s = \frac{A\, cos\,\beta\, cos\,T}{\eta\left(1 - A\, sin\,\beta\, cos\,T\right)}. \tag{2}$$

Тогда амплитудного значения проекции внешней силы на горизонтальную ось недостаточно для начала движения тела.

Движение с двумя мгновенными остановками. Решение уравнения (1) в случае проскальзывания между телом и основанием:

$$V_k\left(T\right) = \eta s_k\left[T - A\, sin\,\beta\, cos\,T\right] + A\, cos\,\beta\, sin\,T + C_k,\ k = 1, 2. \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения: V_1 — для положительной скорости тела, которой соответствует $s_1 = -1$; V_2 — для отрицательной скорости; $s_2 = 1$. Здесь и далее будем рассматривать стационарные решения уравнения движения тела. Введем следующие обозначения для движения тела с положительной скоростью: φ_{11} обозначим время начала движения, а φ_{12} — время окончания движения тела. Через φ_{21} и φ_{22} — те же значения для движения с отрицательной скоростью. Для шести неизвестных получаем четыре уравнения:

$$V_k\left(\varphi_{k_1}\right) = -\eta s_k A\, sin\,\beta\, sin\left(\varphi_{k_1}\right) + A\, cos\,\beta\, sin\left(\varphi_{k_1}\right) + \eta s_k \varphi_{k_1} + C_k = 0; \tag{4}$$

$$V_k\left(\varphi_{k_2}\right) = -\eta s_k A\, sin\,\beta\, sin\left(\varphi_{k_2}\right) + A\, cos\,\beta\, sin\left(\varphi_{k_2}\right) + \eta s_k \varphi_{k_2} + C_k = 0. \tag{5}$$

$$k = 1, 2.$$

Из условия отсутствия длительной остановки тела получаем еще два условия:

$$\varphi_{12} = \varphi_{21}, \tag{6}$$

$$\varphi_{22} = \varphi_{11} + 2p. \tag{7}$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 могут быть исключены из уравнений (4) и (5). Из полученных уравнений численно находятся фазы φ_{11}, φ_{12}, φ_{21} и φ_{22}. Полученные трансцендентные уравнения имеют по два решения. Для выбора правильного решения определяем вторую производную скорости:

$$\frac{d^2V_k}{dT^2}\left(\varphi_{k_1}\right) = A\left(-cos\beta cos\left(\varphi_{k_1}\right) + \eta s_k \, sin\beta sin\left(\varphi_{k_1}\right)\right), \tag{8}$$

которая должна быть положительна при $k = 1$ и отрицательна при $k = 2$.

Движение с двумя длительными остановками. В этом случае условия (6) и (7) несправедливы. При переходе от состояния покоя к движению ускорение тела должно быть равно нулю:

$$\frac{dV_k}{dT}\left(\varphi_{k_1}\right) = \eta s_k\left(1 - A\,sin\beta cos\left(\varphi_{k_1}\right)\right) + A\,cos\beta cos\left(\varphi_{k_1}\right) = 0;\ k = 1, 2. \tag{9}$$

Из уравнения (9) получаем точное решение для фаз движения:

$$\varphi_{k_1} = arccos\left(-\frac{\eta s_k}{A\,cos\beta - \eta s_k\,sin\beta}\right). \tag{10}$$

Нужный корень определяется аналогично предыдущему случаю. Константа C_k и фаза φ_{k2} находятся из (4) и (5). Если справедливо условие $A > \eta / (cos\,\beta + \eta\,sin\,\beta)$, тело может двигаться со скоростью больше нуля, а при условии, что амплитуда возбуждения колебаний — $A > \eta / (cos\,\beta + \eta\,sin\,\beta)$, движение тела происходит со скоростью меньше нуля.

Если время окончания движения тела с положительной скоростью φ_{12} меньше времени начала движения тела с отрицательной скоростью φ_{21}, а φ_{21} меньше, чем $\varphi_{11} + 2p$, то движение твердого тела может иметь две продолжительные остановки.

Рассмотрим движение тела с мгновенной и продолжительной остановками. Реакция горизонтального основания, как и действующая на тело сила, меняется по гармоническому закону, здесь возможны периодические решения.

В случае движения твердого тела с положительной скоростью и мгновенного перехода к отрицательной, а от отрицательной к положительной, после продолжительной остановки получаем систему уравнений (4), (5) для $k = 1, 2,$ (9) для $k = 1$ и условия $\varphi_{12} = \varphi_{21}$. Фаза φ_{11} определяется выражением (10). Для остальных неизвестных также определяется точное решение. Полученное решение справедливо при выполнении условия $\varphi_{22} < \varphi_{11} + 2p$.

При мгновенном переходе от отрицательной скорости движения твердого тела к положительной, а от положительной к отрицательной, после длительной остановки, система уравнений (4–5) при $k = 1, 2$, остается без изменений. Уравнение (9) составляем для $k = 2$, а условие мгновенной остановки заменяем на $\varphi_{22} = \varphi_{11} + 2p$.

Таким образом, для всех возможных режимов стационарного движения твердого тела определяются четыре фазы и две константы интегрирования. На одном периоде движения, используя формулы (3), можно построить зависимость средней скорости движения твердого тела v_m от угла наклона линии действия внешней силы β. На интервале $\varphi_{11} < t < \varphi_{12}$ движение твердого тела происходит со скоростью больше нуля, а при $\varphi_{21} < t < \varphi_{22}$ движение твердого тела происходит со скоростью меньше нуля. На интервале $\varphi_{12} < t < \varphi_{21}$ и $\varphi_{22} < t < \varphi_{11} + 2p$ твердое тело не двигается. При совпадении φ_{12} и φ_{21} или φ_{22} и $\varphi_{11} + 2p$ скорость тела в этих точках меняется мгновенно.

Построенное решение для трех типов движения и состояния покоя (2) за один период колебаний позволяет определить среднюю скорость движения твердого тела:

$$V_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{22}} V\left(T\right)dT.$$

Результаты исследования. Результаты исследования получены при коэффициенте сухого трения $\eta = 0{,}1$ и амплитуде возбуждения $A = 0{,}6$. Зависимости четырех фаз $\varphi_{kj}(\beta)$, $(j,k=1,2)$ от угла наклона внешней силы к горизонту представлены на рис. 1. Пунктирными кривыми обозначены точки мгновенного изменения скорости движения тела, сплошными кривыми — точки изменения скорости с продолжительной остановкой.

При малых углах наклона силы $\varphi_{12} = \varphi_{21}$, $\varphi_{22} = \varphi_{11} + 2p$ движение твердого тела происходит при двух моментальных остановках. Характер движения меняется при изменении угла β в большую сторону. В точке B_1 кривая разветвляется $\varphi_{22}(\beta) = \varphi_{11}(\beta) + 2p$. В результате имеем две кривые: $\varphi_{22}(\beta)$ и $\varphi_{11}(\beta)$, а в точке B_2 разветвляется кривая $\varphi_{12}(\beta) = \varphi_{21}(\beta)$ на $\varphi_{12}(\beta)$ и $\varphi_{21}(\beta)$. Между точками B_1 и B_2 твердое тело может иметь продолжительную и мгновенную остановки. Между точками B_2 и B_3 движение может иметь две продолжительные остановки. В точке B_3 кривые $\varphi_{22}(\beta)$ и $\varphi_{21}(\beta)$ сливаются. Между точками B_3 и B_4 при движения твердого тела в пределах одного периода при скорости большей нуля может быть одна длительная остановка. При больших значениях угла наклона тело находится в покое.

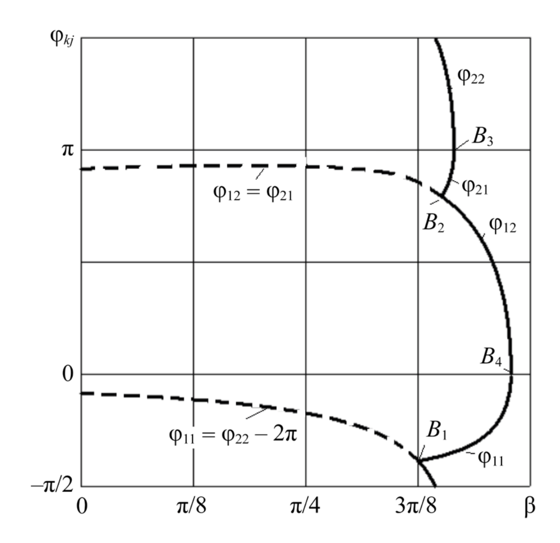


Рис. 1. Зависимости фаз стационарного движения от угла наклона приложенной силы

На рис. 2 представлены зависимости средней скорости твердого тела v_m от угла наклона линии действия внешней силы β при коэффициенте трения 0,1 и нескольких амплитудах возбуждения. При любых значениях амплитуды возбуждения и горизонтальном действии силы (β = 0) средняя скорость твердого тела равна нулю. С увеличением β средняя скорость возрастает. Точки смены режимов движения обозначены только на кривой A = 0,6. Для каждого значения амплитуды силы существует оптимальный угол, при котором средняя скорость движения максимальна.

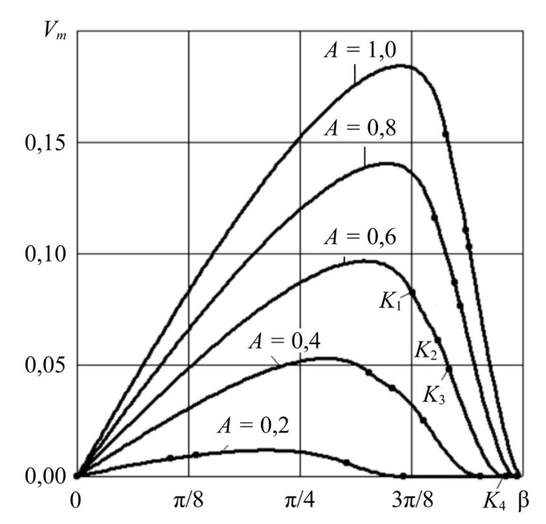


Рис. 2. Зависимость средней скорости V_m от угла β

Обсуждение и заключение. Исследовано движение твердого тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту. Аналитические и численные результаты показали, что для всех возможных режимов стационарного движения твердого тела определяются четыре фазы. Полученные зависимости фаз стационарного движения и средней скорости движения твердого тела от угла наклона линии действия внешней силы позволяют определить необходимые и оптимальные значения параметров задачи для достижения требуемой скорости движения твердого тела. Показано, что для каждого значения амплитуды силы существует оптимальный угол, при котором средняя скорость движения максимальна.

Полученные результаты могут быть использованы в разработке алгоритмов и проектировании движения робототехнических устройств при движении по горизонтальной плоскости с учетом действия гармонических нагрузок.

Список литературы / References

1. Черноусько Ф.Л. Плоские движения тела, управляемого при помощи подвижной массы. *Доклады Российской Академии наук. Физика, технические науки*. 2020;494(1):69–74.

Chernousko FL. Plane Motions by Rigid Body Controlled by means of Movable Mass. *Doklady RAN: Physics*. 2020;494(1):69–74.

2. Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление движением двухмассовой системы. *Доклады Академии Наук*. 2018;480(5):528–532. https://doi.org/10.7868/S0869565218050043

Chernousko FL. Optimal Motion Control of a Two–Mass System. *Doklady AN*. 2018;480(5):528–532. (In Russ.)

3. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. *Сухое трение в задачах механики*. Монография. Москва–Ижевск: издательство «ИКИ»; 2010. 184 с.

Andronov VV, Zhuravlev VF. *Dry Friction in Problems of Mechanics*. Monograph. Moscow–Izhevsk: Publ. House "IKI"; 2010. 184 p. (In Russ.)

4. Блехман И.И. *Вибрационная механика и вибрационная реология (теория и приложения)*. Москва: Физматлит; 2018. 751 с.

Blekhman II. *Vibrational Mechanics and Vibrational Rheology (Theory and Applications)*. Moscow: Fizmatlit; 2018. 751 p. (In Russ.)

5. Черноусько Ф.Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу. *Доклады Академии Наук*. 2005;405(1):56–60.

Chernousko FL. On the Motion of a Body Containing a Movable Internal Mass. *Doklady AN*. 2005;405(1):56–60. (In Russ.)

6. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы. *Прикладная математика и механика*. 2006;70(6):915–941.

Chernous'ko FL. Analysis and Optimization of the Motion of a Body Controlled by means of a Movable Internal Mass. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2006;70(6):819–842. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.01.003

7. Hongyi Li, Katsuhisa Furuta, Felix L Chernousko. Motion Generation of the Capsubot Using Internal Force and Static Friction. In: *Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control.* New York City: IEEE; 2006. P. 6575–6580. https://doi.org/10.1109/CDC.2006.377472

8. Нунупаров А.М., Суханов А.Н., Сырых Н.В. Оптимизация средней скорости капсульного робота методом нелинейного модельно-упреждающего управления. В: *Труды XXXIII Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения.* Москва: Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук; 2021. С. 436–441.

Nunuparov AM, Sukhanov AN, Syrykh NV. Optimization of the Average Speed of a Capsule Robot by Nonlinear Model-Proactive Control. In: *Proc. XXXIII International Innovative Conference of Young Scientists and Students on Problems of Machine Science*. Moscow: IMASH RAN; 2021. P. 436–441. (In Russ.)

9. Сырых Н.В., Нунупаров А.М., Суханов А.Н. К построению математической модели электромагнитной силы соленоида для капсульного робота. В: *Труды XXXIII Междунар. инновационной конф. молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения.* Москва: Институт машиноведения им. А. Благонравова Российской академии наук; 2021. С. 484–490.

Syrykh NV, Nunuparov AM, Sukhanov AN. On Building a Mathematical Model of the Electromagnetic Force of a Solenoid for a Capsule Robot. In: *Proc. XXXIII International Innovative Conference of Young Scientists and Students on Problems of Machine Science*. Moscow: IMASH RAN; 2021. P. 484–490. (In Russ.)

10. Болотник Н.Н., Нунупаров А.М., Чащухин В.Г. Капсульный вибрационный робот с электромагнитным приводом и возвратной пружиной: динамика и управление движением. *Известия Российской Академии Наук. Теория и системы управления.* 2016;(6):146–160.

Bolotnik NN, Nunuparov AM, Chashchukhin VG. Capsule-Type Vibration-Driven Robot with an Electromagnetic Actuator and an Opposing Spring: Dynamics and Control of Motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2016;(6):146–160.

11. Шматков А.М. Периодические решения задачи оптимального управления поворотом твердого тела с помощью внутренней массы. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.* 2020;(3):63–67. URL: https://www.mathnet.ru/links/3f7d22880247a4d39922b11f27ea3c8c/vmumm4333.pdf (дата обращения: 18.11.2024).

Shmatkov AM. Periodic Solutions to the Optimal Control Problem of Rotation of a Rigid Body Using Internal Mass. *Moscow University Bulletin. Mathematics. Mechanics*. 2020;(3):63–67. URL: https://www.mathnet.ru/links/3f7d22880247a4d39922b11f27ea3c8c/vmumm4333.pdf (accessed: 18.11.2024).

12. Сахаров А.В. Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости. *Прикладная математика и механика*. 2015;79(2):132–141. URL: https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues.php?y=2015&n=2&p=196 (дата обращения: 18.11.2024).

Sakharov AV. Rotation of a Body with Two Movable Internal Masses on a Rough Plane. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2015;79(2):132–141. URL: https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues.php?y=2015&n=2&p=196 (accessed: 18.11.2024).

13. Xiong Zhang, Jian Xu, Hongbin Fang. A Vibration-Driven Planar Locomotion Robot – *Shell*. *Robotica.* 2018;36(9):1402–1420. http://doi.org/10.1017/S0263574718000383

14. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс. *Доклады Академии Наук*. 2016;470(4):406–410. https://doi.org/10.7868/S0869565216280070

Chernousko FL. Movement of a Body along a Plane under the Influence of Moving Internal Masses. *Doklady AN*. 2016;470(4):406–410. (In Russ.)

15. Муницын А.И., Крайнова Л.Н. Вибрационное перемещение твердого тела по наклонной плоскости. *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2023;(1):31–35.

Munitsyn AI, Krainova LN. Vibratory Motion of a Rigid Body along an Inclined Plane. *Engineering and Automation Problems*. 2023;(1):31–35.

Об авторах:

Александр Иванович Муницын, доктор технических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1), SPIN-код, ORCID

Валерьян Эдуардович Цой, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета «МЭИ» (111250, Российская Федерация, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1), SPIN-код, ORCID, tsoyve@mpei.ru

Заявленный вклад авторов:

А.И. Муницын: описание теоретической части исследования движении тяжелого плоского тела по горизонтальной плоскости под действием гармонической силы, направленной под углом к горизонту; оформление научной статьи.

В.Э. Цой: проведение численного моделирования, оформление научной статьи.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Alexander I. Munitsyn, Dr.Sci. (Eng.), Professor of the Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines Department, National Research University MPEI (14, Krasnokazarmennaia Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID

Valeryan E. Tsoy, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines Department, National Research University MPEI (14, Krasnokazarmennaia Str., Moscow, 111250, Russian Federation), SPIN-code, ORCID, tsoyve@mpei.ru

Claimed Contributorship:

AI Munitsyn: description of the theoretical part of the study of the movement of a heavy flat body along a horizontal plane under the action of a harmonic force directed at an angle to the horizon; preparation of the scientific paper.

VE Tsoy: conducting numerical simulations, preparation of the scientific paper.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 16.12.2024
Поступила после рецензирования / Reviewed 14.01.2025
Принята к публикации / Accepted 20.01.2025